Teoriblad 1

Regler

Inlämning sker främst via email till `poteori@kodsport.se` senast den 10 mars. Skriv helst digitalt och lämna in som en PDF. Om du skriver dina lösningar för hand ska du utöver att skicka in fotokopior över mail posta dina lösningar till


```
Joshua Andersson
Kemivägen 7B
412 58 Göteborg
```


För samtliga uppgifter behöver lösningen endast beskrivas teoretiskt, utan att implementeras i kod. Inkludera gärna pseudokod om du tycker det är lättare att beskriva än i text.

Deluppgifter klarar du genom att beskriva en lösning som är tillräckligt snabb. Vi bryr oss endast om tidskomplexiteten av din lösning som funktion av indatan, **om inte annat anges**. När du beräknar tidskomplexiteten är vi bara intresserade av den ledande termen. Detta betyder att en lösning som är t.ex. $O(N + M)$ med $N \leq M$ räknas som $O(M)$. Given den slutgiltiga tidskomplexiteten kommer vi beräkna uttrycket (alla logaritmer är i bas 2!) och kolla om det är *strikt mindre än* 10^9 när vi avgör om du klarar en deluppgift eller inte. Delpoäng ges inte inom en deluppgift om du bara är lite över gränsen. Har du frågor kring om en viss tidskomplexitet är okej eller inte, *fråga juryn privat* på Discord eller via mailen ovan.

Tidskomplexitet krävs inte att du beräknar, även om vi uppskattar att du själv försöker beskriva den för rättandets och träningens skull. Felaktiga beskrivningar av tidskomplexitet ger inget avdrag.

Bevis krävs inte, även om du gärna får inkludera det, återigen för att rättandet ska bli enklare och för din egen övning. Detta innebär t.ex att du kan göra helt omotiverade antaganden utan att bevisa dessa som underlag för din lösning. Felaktiga bevis ger inte avdrag – du tjänar alltså inget på att *inte* försöka bevisa saker. Tvärtom kommer vi ge dig feedback på dina felaktiga bevis.

Avdrag kan komma att ges under flera omständigheter, t.ex. ofullständiga beskrivningar, specialfall du missar eller olika buggar.

Delpoäng kan ibland ges till ofullständiga/felaktiga lösningar om de innehåller delar som är korrekta.

Problem 1. Det finns ett rutnät av storleken $N \times N$ där K rutor är blockerade. Du får också koordinaterna för de K rutor som är blockerade. Du ska räkna det totala antalet rektanglar man kan skapa som innehåller det övre vänstra hörnet.

Exempel 1. $N = 2$ och $K = 1$, och du får veta att rutan på rad 1 och kolumn 1 är blockerad.

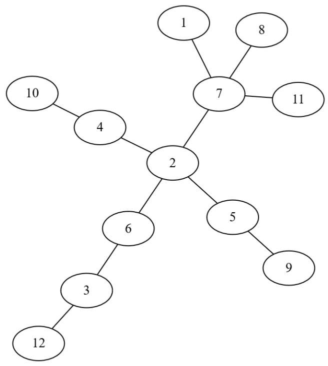
Om vi kallar rutan på rad 0 och kolumn 0 för det övre vänstra hörnet så finns det totalt 3 olika rektanglar man kan skapa.

Exempel 2. Om $N = 3$ och $K = 0$ finns det 9 olika rektanglar som innehåller övre vänstra hörnet.

I alla deluppgifter gäller det att $N \leq 10^{18}$.
Deluppgift 1 (2 poäng): $N^2 + KlogK < 10^9$.
Deluppgift 2 (3 poäng): $N + KlogK < 10^9$.
Deluppgift 3 (5 poäng): $KlogK < 10^9$.

Problem 2. Du får givet ett träd med N noder numrerade från 1 till N. Du vill hitta en ordning på noderna $a_1, a_2, ..., a_N$, där $a_1 = 1, a_N = N$, och avståndet mellan a_i och a_{i+1} är som mest 2 för alla $i = 1, 2, ..., N-1$. Avståndet mellan två noder är antalet kanter du besöker för att ta dig från den ena till den andra. Om en sådan ordning finns ska du hitta vilken som helst. Annars ska du rapportera att det inte finns någon ordning som uppfyller kriteriet.

Exempel.

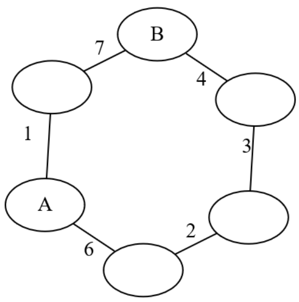


Figur 1: En möjlig ordning är 1, 11, 8, 7, 5, 9, 2, 10, 4, 6, 3, 12.

Om inte specificerat gäller det att $N \leq 10^6$ för alla deluppgifter.
Deluppgift 1 (2 poäng): Graden på varje nod är ≤ 3.
Deluppgift 2 (3 poäng): $N \leq 1000$.
Deluppgift 3 (5 poäng): Inga ytterligare begränsningar.

Problem 3. Du får givet en oriktad graf med N noder och M kanter. Det finns som mest en kant mellan varje par av noder. Varje kant är unikt numrerad mellan 1 och M. För att resa i grafen måste du köpa en biljett. Varje biljett beskrivs av två heltal $1 \leq i \leq j \leq M$, vilket innebär att du får färdas längs med alla kanter vars nummer k uppfyller $i \leq k \leq j$. Det finns en biljett för varje par av i, j där $1 \leq i \leq j \leq M$, vars kostnad är $j - i$. Du får nu Q stycken frågor. För varje fråga får du givet två noder A och B, och du ska svara med priset av den billigaste biljetten som låter dig färdas från A till B, eller avgöra att en sådan biljett ej existerar.

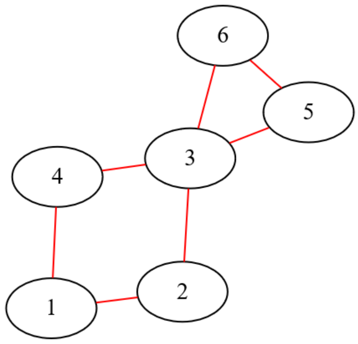
Exempel.



Figur 2: Om vi går medurs i cykeln behöver vi biljetten *1,7*, vilket kostar $7 - 1 = 6$. Om vi istället går moturs behöver vi biljetten *2,6*, vilket kostar $6 - 2 = 4$. Detta är billigaste biljetten för denna instansen. Notera att grafen inte är en cykel i allmänhet, utan bara i exemplet.

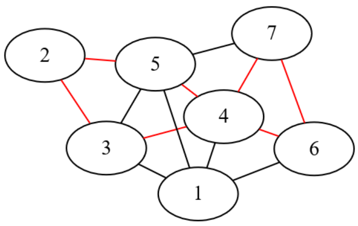
Om inte specificerat gäller det att $N, M \leq 5 \cdot 10^4$ och $Q \leq 1000$ för alla deluppgifter.
Deluppgift 1 (1 poäng): $M \leq 50$.
Deluppgift 2 (1 poäng): $M \leq 400$.
Deluppgift 3 (1 poäng): $M \leq 1000$.
Deluppgift 4 (1 poäng): $M \leq 5000$.
Deluppgift 5 (1 poäng): $M, Q \leq 7000$.
Deluppgift 6 (1 poäng): $M \leq 10000$.
Deluppgift 7 (1 poäng): $N \leq 1000$.
Deluppgift 8 (3 poäng): Inga ytterligare begränsningar.

Problem 4. Du får givet en sammanhängande, oriktad graf med N noder och M kanter. Det finns som mest en kant mellan varje par av noder. Ditt mål är att hitta en delmängd kanter som utgör en *fisk*-delgraf. Detta innebär att om du tar bort alla kanter förutom de valda, och sedan tar bort de resulterande noderna med grad 0, så är den kvarvarande komponenten isomorfisk med fiskgrafen (se figur 3). En given graf är isomorfisk med fisk-delgrafen om man kan ändra nodernas index så att grafen blir exakt likadan som fiskgrafen.



Figur 3: Hur fisk-grafen ser ut.

Exempel.



Figur 4: En graf där kanterna av en giltig fisk-delgraf är rödmarkerade.

Om inte specificerat gäller det att $N \cdot M < 10^9$ för alla deluppgifter.

Deluppgift 1 (1 poäng): $N \leq 16$.

Deluppgift 2 (1 poäng): Grafen är en kaktus. Detta innebär att varje par av cykler (där alla noder är unika) har som mest en nod gemensamt.

Deluppgift 3 (1 poäng): $M \leq N + 10$.

Deluppgift 4 (7 poäng): Inga ytterligare begränsningar.